بسمه تعالی

# بخش دوم

# حل روابط بازگشتی

ارائه دهنده : محمد فرجی مهماندار

# الگوریتم های بازگشتی

- الگوریتم های بازگشتی :
- فرایندی تکراری که در آن ، یک الگوریتم خودش را فراخوانی می کند
- مزایا :
  - کد نویسی کوتاه وراحت
- معایب :
  - فراخوانی های مکرر ونیاز به پشته
  - معمولا از نظر فضا وزمان بهینه نیستند
- بعضی از مسائل را می توان هم به صورت غیر بازگشتی وهم بازگشتی حل کرد
- برای اینکه بتوان از روش بازگشتی برای حل یک مسئله استفاده نمود، مسئله باید قابلیت خرد شدن به زیرمسئله هایی از همان مسئله اصلی واندازه کوچکتر را داشته باشد

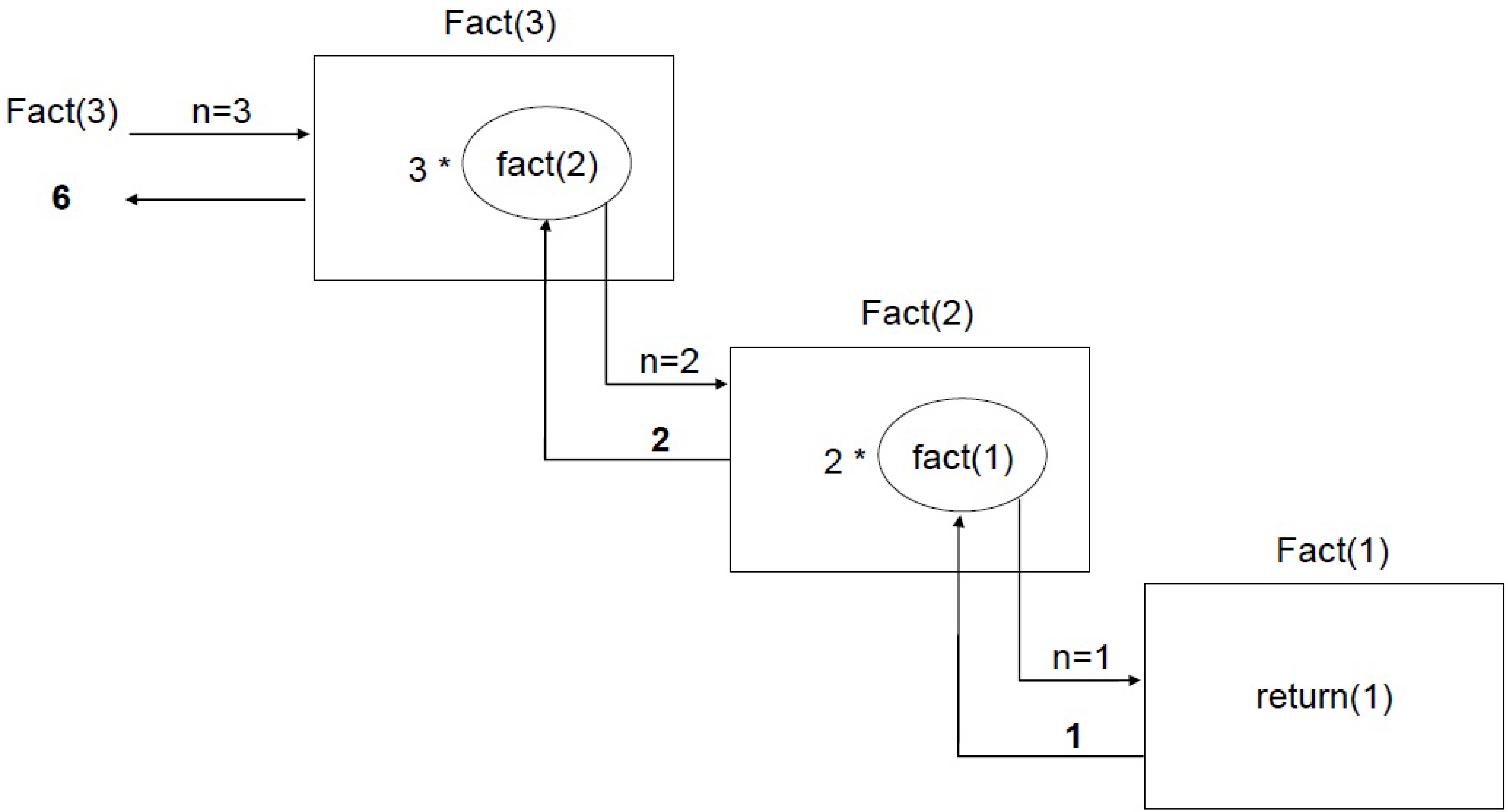
# الگوریتم بازگشتی فاکتوریل

- **مساله:** $n! = n(n\text{-}1)(n\text{-}1)\ldots(3)(2)(1)$ که $n \geq 1$ و $0! = 1$ را محاسبه کنید.
  - **ورودی ها:**
    - یک عدد صحیح و غیر منفی $n$.
  - **خروجی ها:**
    - $n!$.

```
int fact ( int n)
{
    if ( n == 0)
        return 1 ;
    else
        return n * fact( n – 1) ;
}
```

$$f(n) = n! = \begin{cases} 1 & if \quad n = 1 \\ n \times (n-1)! & if \quad n > 1 \end{cases}$$

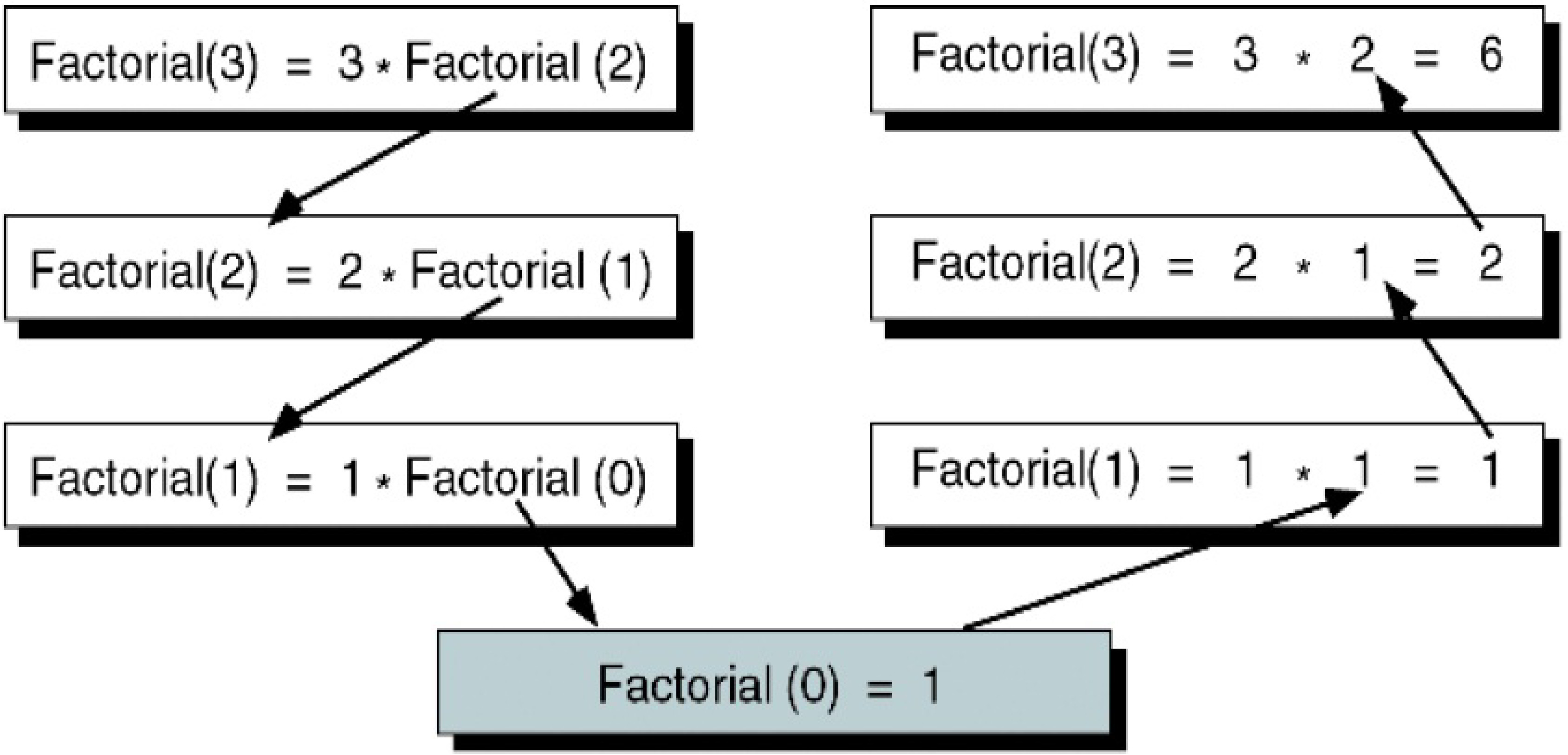
# چگونگی پیمایش تابع فاکتوریل



# چگونگی پیمایش تابع فاکتوریل

راه حل بازگشتی یک مسئله شامل دو مرحله کلی است :

- اول مسئله را از بالا به پایین می شکند.
- سپس مسئله را از پایین به بالا حل می کند.

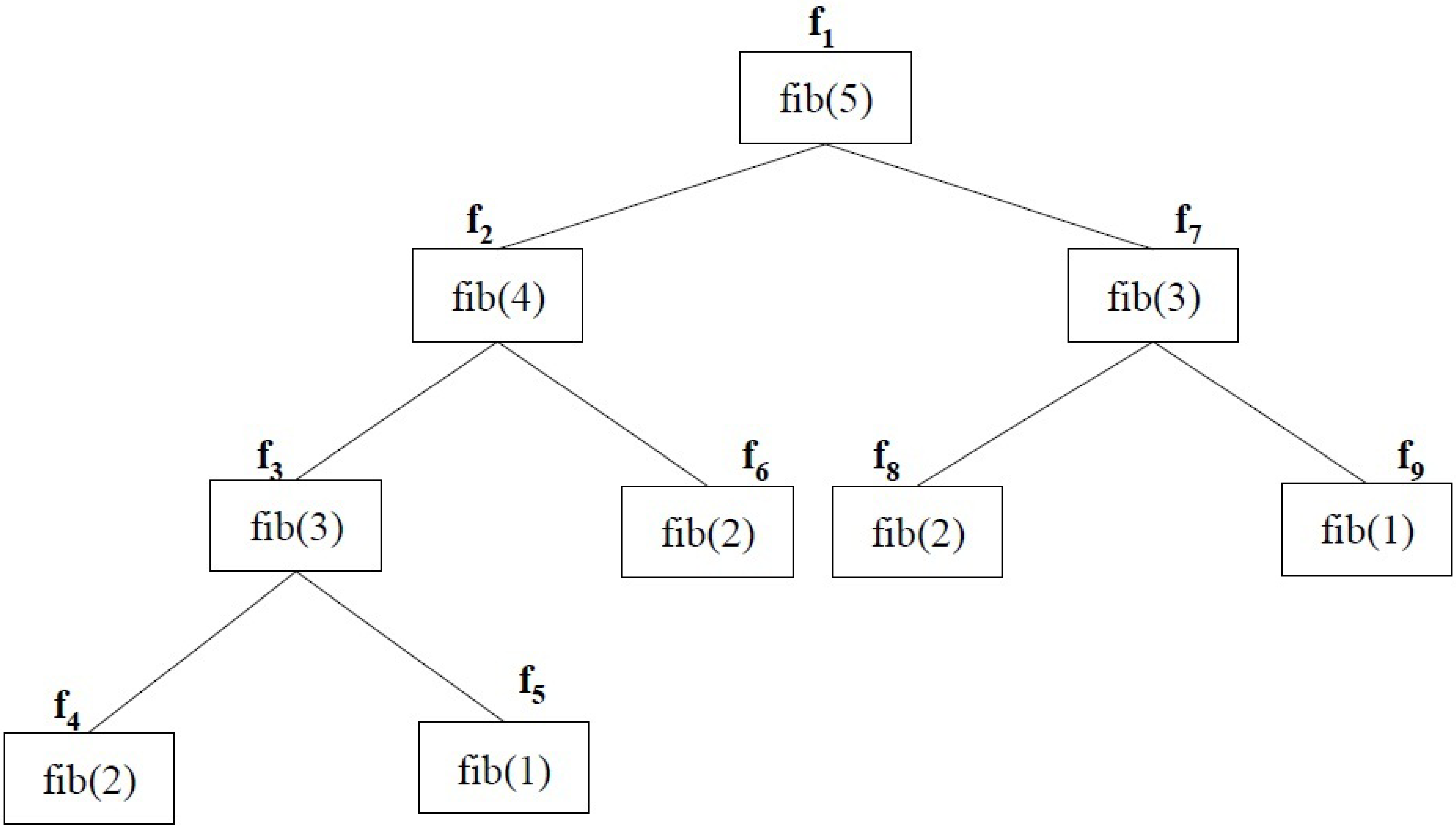


# الگوریتم بازگشتی فیبوناچی

$$fib(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 1 & \text{if } n = 2 \\ fib(n-1) + fib(n-2) & \text{if } n > 2 \end{cases}$$

```
int fib (int n)
  {
    if (n == ١ or n == ٢) then  return(١);
    else
  return (fib(n - ١) + fib(n - ٢));
  }
```

# چگونگی پیمایش تابع فیبوناچی



# چگونگی پیمایش تابع فیبوناچی

Fib(۵)
= Fib(۴) + Fib(۳)
= Fib(۳) + Fib(۲) + Fib(۳)
= Fib(۲) + Fib(۱) + Fib(۲) + Fib(۳)
= Fib(۱) + Fib(۰) + Fib(۱) + Fib(۲) + Fib(۳)
= Fib(۱) + Fib(۰) + Fib(۱) + Fib(۱) + Fib(۰) + Fib(۳)
= Fib(۱) + Fib(۰) + Fib(۱) + Fib(۱) + Fib(۰) + Fib(۲) + Fib(۱)
= Fib(۱) + Fib(۰) + Fib(۱) + Fib(۱) + Fib(۰) + Fib(۱) + Fib(۰) + Fib(۱)

**مشکل : محاسبه تکراری جملات**

**راه وحل : برنامه نویسی پویا و استفاده از آرایه برای ذخیره جملات قبلی**

# مسئله برج هانوی (Hanoi Tower)

تعریف مسئله :

سه میله _ میله مبدا A ، میله کمکی B و میله مقصد C وتعدادی دیسک در میله مبدا داریم.

هدف: انتقال دیسک ها از میله مبدا به میله مقصد با کمک میله کمکی با دو شرط زیر:

- ❑ در هر زمان فقط یک دیسک را می‌توان جابجا نمود.
- ❑ نباید در هیچ زمانی دیسکی بر روی دیسک با اندازه کوچکتر قرار بگیرد.

اما هدف ما ارائه الگوریتمی برای انتقال دیسک ها با کمترین جابجایی ممکن است.

برای جابجا کردن بزرگترین دیسک از میله A به میله C ، ابتدا باید تمامی دیسک های کوچکتر به میله B منتقل شوند.پس از تمام شدن این مرحله،دیسک بزرگ را از میله A به میله C منتقل کرده ومجددا به کمک میله A تمامی دیسک های میله B را به میله C منتقل می کنیم.

# حل بازگشتی مسئله برج هانوی

پس برای حل بازگشتی مسئله برج هانوی به طور خلاصه داریم :

- مرحله اول : n-1 دیسک بالایی میله مبدا (A) را با شرایط ذکر شده و به کمک میله B به میله مقصد (C) منتقل می شوند.
- مرحله دوم : بزرگترین دیسک از میله مبدا به میله مقصد منتقل می شود.
- مرحله سوم : n-1 دیسک میله B با کمک گرفتن از میله A به میله مقصد منتقل می شوند.

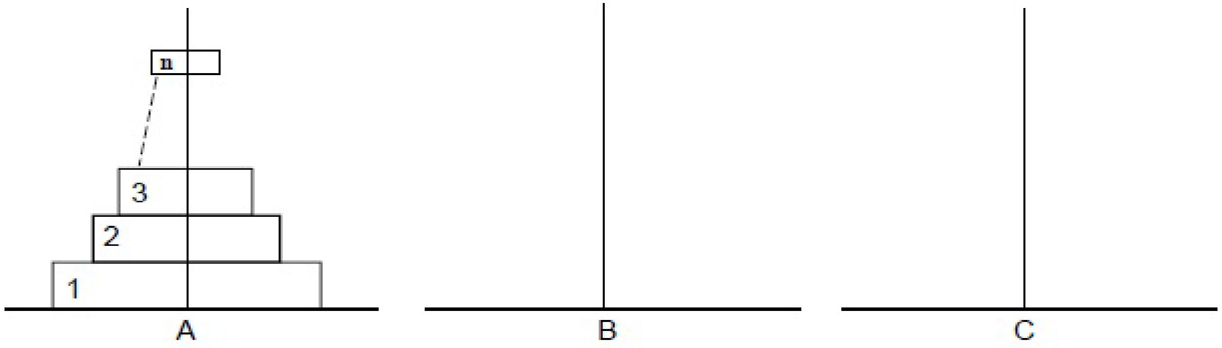
در واقع توانستیم عملیات جابجا کردن n دیسک را به دو عملیات مشابه ولی با اندازه کمتر و یک عملیات ساده تقسیم کنیم .

- رابطه بازگشتی حاصله عبارتست از:

$$T(n) = \begin{cases} ۱, & n = ۱ \\ T(n-۱) + ۱ + T(n-۱) & n > ۱ \end{cases}$$

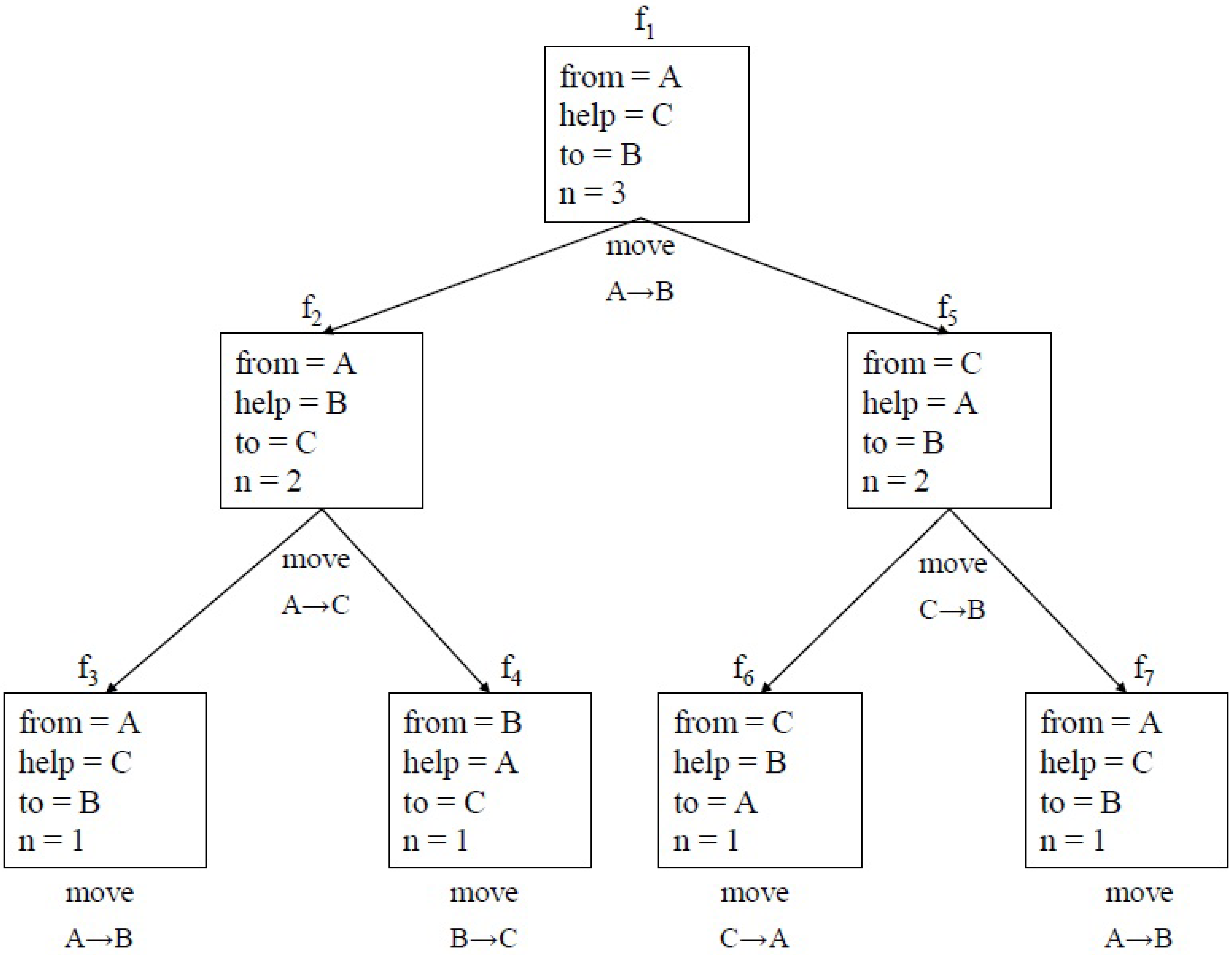
- $T(n) = 2^n - 1$

# حل بازگشتی مسئله برج هانوی

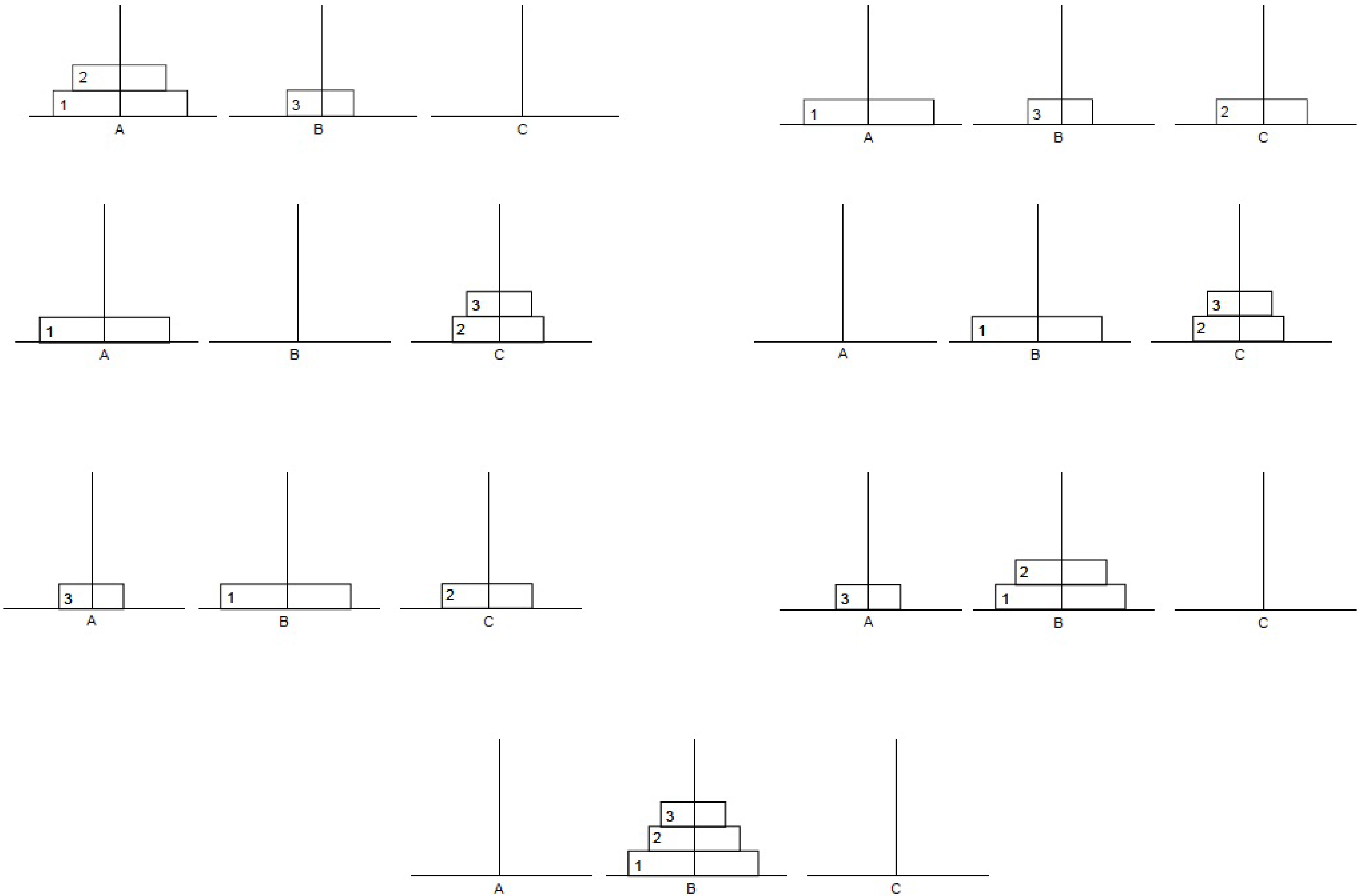



```
Alg Hanoy (n , from , help , to)
  {
    if (n == ١) then
          move top disk from (from → to)  ;
    else
       {
          Hanoy(n – ١ ,  from  ,  to  ,  help) ;
          move top disk from  (from → to)  ;
          Hanoy (n – ١  ,  help  ,  from  ,  to) ;
       }
  }
```

# چگونگی فراخوانی تابع هانوی



# چگونگی انتقال دیسک ها

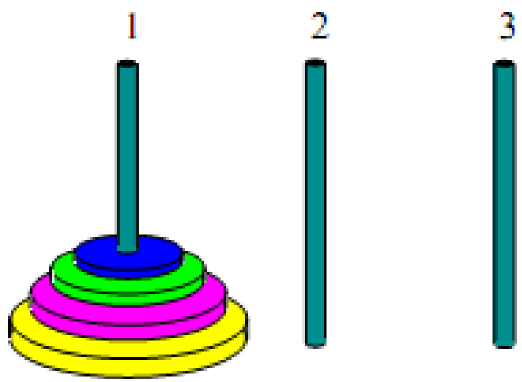


# مسائلی از برج های هانوی

- اگر در برج هانوی دیسک‌های با شماره‌ی فرد و زوج به ترتیب در میله های ۱ و ۲ باشند، با حداقل حرکت‌ها می خواهیم همه دیسک‌ها را در میله ۳ قرار دهیم چگونه این کار شدنیست؟

- اگر در مسئله برج های هانوی امکان انتقال مستقیم بین میله های مبدا و مقصد (۱ و ۳) نباشد، حداقل حرکت‌ها برای انتقال دیسک ها از میله ۱ به ۳ چقدر است؟

- اگر در مسئله برج های هانوی در ابتدای امر از $n$ دیسک، $n_1$ دیسک در میله اول، $n_2$ دیسک در میله دوم و بقیه در میله سوم باشند، حداقل حرکت‌ها برای انتقال دیسک ها از میله ۱ به ۳ چقدر است؟



# روش های حل روابط بازگشتی

- پیچیدگی زمانی یک الگوریتم بازگشتی بوسیله یک معادله بازگشتی بیان می شود
- برای تعیین پیچیدگی زمانی باید معادله بازگشتی را حل نمود.
- روش های حل روابط بازگشتی :
  - استفاده از استقرای ریاضی (induction)
  - معادله مشخصه
  - روش جایگذاری و تکرار
  - قضیه اصلی
  - استفاده از توابع مولد و ...

# حل روابط بازگشتی بوسیله استقرا

- معادله بازگشتی $t_n = t_{n-1} + 1$

که در آن:

- $t_{n-1}$: تعداد ضرب ها در فراخوانی بازگشتی
- ۱ : عمل ضرب در بالاترین سطح

- شرط اولیه: $t_0 = 0$
- حل رابطه بازگشتی: با بررسی چند مقدار اول یک راه حل کاندیدا بدست آورید

$t_1 = t_0 + 1 = 0 + 1 = 1$

$t_2 = t_1 + 1 = 1 + 1 = 2$

$t_3 = t_2 + 1 = 2 + 1 = 3$

…

$t_n = n$

- درستی راه حل کاندیدا را با استقرا ثابت کنید.

# اثبات بوسیله استقراء

- پایه استقراء: برای $n = 0$ داریم:

$$t_0 = 0$$

- فرض استقراء: فرض کنید برای یک عدد صحیح و مثبت $n$ داریم:

$$t_n = n$$

- گام استقراء: باید نشان دهیم که:

$$t_{n+1} = n + 1$$

$$t_{n+1} = t_{(n+1)-1} + 1 = t_n + 1 = n + 1$$

# حل روابط بازگشتی بوسیله استقرا

- بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} t_n = t_{n/2} + 1 & for\ n > 1,\ n\ a\ power\ of\ 2 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

چند مقدار اولیه عبارتند از:

$$t_2 = t_{2/2} + 1 = t_1 + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$t_4 = t_{4/2} + 1 = t_2 + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$t_8 = t_{8/2} + 1 = t_4 + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$t_{16} = t_{16/2} + 1 = t_8 + 1 = 4 + 1 = 5$$

حدس می زنیم که :

$$t_n = \lg n + 1$$

حال، بوسیله استقراء حدس خود را بررسی می کنیم.

# اثبات بوسیله استقراء

پایه استقراء: برای $n = 1$ داریم:

$$t_1 = 1 = \lg 1 + 1$$

فرض استقراء: فرض کنید برای مقدار دلخواه $n > 2$ که $n$ توانی از ۲ می باشد داریم:

$$t_n = \lg n + 1$$

گام استقراء:

$$t_{2n} = \lg (2n) + 1$$

$$t_{2n} = t_{(2n/2)} + 1 = t_n + 1 = \mathbf{\lg}\ \boldsymbol{n} + \mathbf{1} + 1$$

$$= \lg n + \lg 2 + 1$$

$$= \lg (2n) + 1$$

# حل روابط بازگشتی بوسیله استقرا

- بازگشتی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} t_n = 2t_{n/2} + n - 1 & \text{for } n > 1,\ n \text{ a power of } 2 \\ t_1 = 0 \end{cases}$$

چند مقدار اولیه عبارتند از:

$t_2 = 2t_{2/2} + 2 - 1 = 2t_1 + 1 = 1$

$t_4 = 2t_{4/2} + 4 - 1 = 2t_2 + 3 = 5$

$t_8 = 2t_{8/2} + 8 - 1 = 2t_4 + 7 = 17$

$t_{16} = 2t_{16/2} + 16 - 1 = 2t_8 + 15 = 49$

چون راه حل کاندیدای واضحی وجود ندارد، نمی توان از استقراء استفاده نمود.

# حل روابط بازگشتی بوسیله معادله مشخصه

- رابطه بازگشتی خطی همگن: یک رابطه بازگشتی به شکل زیر

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$$

که در آن $k$ و جملات $a_i$ ثابت می باشند، یک رابطه بازگشتی **خطی همگن** با ضرایب ثابت نامیده می شود.

- $7 t_n - 3 t_{n-1} = 0$
- $6 t_n - 5 t_{n-1} + 8 t_{n-2} = 0$
- $8 t_n - 4 t_{n-3} = 0$
- (Fibonacci sequence): $t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \quad \Rightarrow \quad t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$

# معادله مشخصه

- معادله مشخصه رابطه بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت به صورت زیر

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = 0$$

برابر است با :

$$a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k r^0 = 0$$

- مثال: معادله مشخصه رابطه بازگشتی زیر را تعیین کنید:

$$5\ t_n - 7\ t_{n-1} + 6\ t_{n-2} = 0$$

$$5r^2 - 7r + 6 = 0$$

# قضیه B.1

- فرض کنید رابطه بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت زیر داده شده است:

$$a_0\, t_n + a_1\, t_{n-1} + \ldots + a_k\, t_{n-k} = 0$$

اگر معادله مشخصه آن که به صورت زیر می باشد:

$$a_0\, r^k + a_1\, r^{k-1} + \ldots + a_k\, r^0 = 0$$

دارای $k$ ریشه متمایز $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_k$ باشد، آنگاه تنها حل رابطه بازگشتی به صورت زیر می باشد:

$$t_n = c_1\, r_1^{\,n} + c_2\, r_2^{\,n} + \ldots + c_k\, r_k^{\,n}$$

که در آن جملات $c_i$ ثابت های دلخواهی می باشند.

- مثال:

$$\bullet\begin{cases} t_n - 3t_{n-1} - 4t_{n-2} = 0 & for \quad n > 1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

$$r^2 - 3r - 4 = 0 \Rightarrow (r - 4)(r + 1) = 0 \Rightarrow r = 4, -1$$

$$t_n = c_1 4^n + c_2(-1)^n$$

$$\begin{cases} t_0 = c_1 4^0 + c_2(-1)^0 = 0 \\ t_1 = c_1 4^1 + c_2(-1)^1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 4c_1 - c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1/5 \\ c_2 = -1/5 \end{cases}$$

$$t_n = 1/5(4^n) - 1/5(-1)^n$$

# حل روابط بازگشتی بوسیله معادله مشخصه

- مثال: دنباله فیبوناتچی :

$$\begin{cases} t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0 & for \quad n > 1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

$r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow r = (1 + \sqrt{5})/2, \; r = (1 - \sqrt{5})/2)$

$$t_n = c_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\left\{ t_0 = c_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^0 + c_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^0 = 0 \qquad t_1 = c_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 = 1 \right.$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) c_1 + \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) c_2 = 1 \end{cases} \qquad c_1 = 1/\sqrt{5}, \qquad c_2 = -1/\sqrt{5}$$

$$t_n = \frac{[(1+\sqrt{5})/2]^n - [(1-\sqrt{5})/2]^n}{\sqrt{5}}$$

# قضیه B.2

- فرض کنید که $r$ یک ریشه با تعدد $m$ از معادله مشخصه یک رابطه بازگشتی خطی همگن با ضرایب ثابت باشد. آنگاه تمامی جملات زیر:

$$t_n = r^n,\ t_n = nr^n,\ t_n = n^2 r^n,\ t_n = n^3 r^n,\ \ldots,\ t_n = n^{m-1} r^n$$

راه حلی برای رابطه بازگشتی می باشند. بنابراین بازاء هر یک از این جواب ها، یک جمله در راه حل عمومی رابطه بازگشتی گنجانده می شود.

# حل روابط بازگشتی بوسیله معادله مشخصه

- مثال :

$$\bullet \begin{cases} t_n - 7t_{n-1} + 15t_{n-2} - 9t_{n-3} = 0 \quad \text{for} \quad n > 2 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

$$r^3 - 7r^2 + 15r - 9 = 0 \Rightarrow (r-1)(r-3)^2 = 0 \Rightarrow r = 1, r = 3$$

$$t_n = c_1 1^n + c_2 3^n + c_3 n 3^n$$

$$\begin{cases} t_0 = c_1 1^0 + c_2 3^0 + c_3(0)(3^0) = 0 \\ t_1 = c_1 1^1 + c_2 3^1 + c_3(1)(3^1) = 1 \\ t_2 = c_1 1^2 + c_2 3^2 + c_3(2)(3^2) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 3c_2 + 3c_3 = 1 \\ c_1 + 9c_2 + 18c_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = -1/3 \end{cases}$$

$$t_n = (-1)1^n + (1)3^n + (-1/3)(n3^n) = -1 + 3^n - n3^{n-1}$$

# حل روابط بازگشتی بوسیله معادله مشخصه

- مثال :

$$\begin{cases} t_n - 5t_{n-1} + 7t_{n-2} - 3t_{n-3} = 0 \quad for \quad n > 2 \\ t_0 = 1 \\ t_1 = 2 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

$$r^3 - 5r^2 + 7r - 3 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 (r-3) = 0 \Rightarrow r = 1, r = 3$$

$$t_n = c_1 3^n + c_2 1^n + c_3 n 1^n$$

$$\begin{cases} t_0 = c_1 3^0 + c_2 1^0 + c_3(0)(1^0) = 1 \\ t_1 = c_1 3^1 + c_2 1^1 + c_3(1)(1^1) = 2 \\ t_2 = c_1 3^2 + c_2 1^2 + c_3(2)(1^2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 3c_1 + c_2 + c_3 = 2 \\ 9c_1 + c_2 + 2c_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

$$t_n = 0(3^n) + 1(1^n) + 1(n1^n) = n + 1$$

# روابط بازگشتی غیر همگن

- یک رابطه به شکل زیر:

$$a_0\, t_n + a_1\, t_{n\text{-}1} + \ldots + a_k\, t_{n\text{-}k} = f(n)$$

که در آن $k$ و جملات $a_k$ ثابت می باشند و $f(n)$ یک تابع غیر صفر می باشد، یک رابطه

بازگشتی خطی **غیر همگن** با ضرایب ثابت نام دارد.

# یک مورد خاص و متداول: قضیه B.3

- رابطه بازگشتی غیر همگن زیر:

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \ldots + a_k t_{n-k} = b^n p(n)$$

که در آن $b$ یک ثابت و $p(n)$ یک چند جمله ای برحسب $n$ از درجه $d$ می باشد، می تواند به

یک رابطه بازگشتی خطی همگن که معادله مشخصه آن به صورت زیر می باشد، تبدیل شود:

$$(a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \ldots + a_k r^0)(r - b)^{d+1} = 0$$

اگر در سمت راست بیش از یک جمله مانند $b^n p(n)$ وجود داشته باشد، بازاء هر کدام یک

جمله به معادله مشخصه اضافه می شود.

# حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال:

$$t_n - 3t_{n-1} = 4^n$$

$$b = 4\ ,\ p(n) = 1 = n^0$$

$$(r - 3)(r - 4)^{0+1} = 0$$

- مثال:

$$t_n - 3t_{n-1} = 4^n(8n + 7)$$

$$b = 4,\ p(n) = 8n^1 + 7$$

$$(r - 3)(r - 4)^{1+1} = 0$$

# حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال:

$$
\bullet \begin{cases} t_n - 3t_{n-1} = 4^n(2n+1) \quad for \quad n>1 \\ t_0 = 0 \\ t_1 = 12 \end{cases}
$$

$$
(r-3)(r-4)^{1+1} = 0 \Rightarrow (r-3)(r-4)^2 = 0 \Rightarrow t_n = c_1 3^n + c_2 4^n + c_3 n 4^n
$$

$$
t_2 - 3t_1 = 4^2(2*2+1) \Rightarrow t_2 = 3*12 + 80 = 116
$$

$$
t_n = 20(3^n) - 20(4^n) + 8n4^n
$$

# حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال:

$$\begin{cases} t_n - t_{n-1} = n-1 \quad for \quad n>0 \\ t_0 = 0 \end{cases}$$

$$b^n p(n) = n - 1 = 1^n(n^1 - 1) \Rightarrow b = 1,\ d = 1$$

$$(r-1)(r-1)^{1+1} = 0 \Rightarrow (r-1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 n^2 1^n \Rightarrow t_n = c1 + c_2 n + c_3 n^2$$

$$t_1 = t_0 + 1 - 1 = 0 + 0 = 0$$

$$t_2 = t_1 + 2 - 1 = 0 + 1 = 1$$

$$t_n = n(n-1)/2$$

# حل روابط بازگشتی: مثال

- مثال:

$$\begin{cases} t_n - 2t_{n-1} = n + 2^n & for \quad n > 1 \\ t_1 = 0 \end{cases}$$

$$n = (\underset{\underset{b}{\uparrow}}{1}^n)n^{\overset{d}{\downarrow}1} \qquad\qquad 2^n = (\underset{\underset{b}{\uparrow}}{2}^n)n^{\overset{d}{\downarrow}0}$$

$$(r-1)^{1+1} \qquad\qquad (r-2)^{0+1}$$

$$(r-2)(r-1)^2(r-2) = (r-2)^2(r-1)^2$$

# تغییر متغیر

- تغییر متغیر می تواند یک رابطه بازگشتی را به یک رابطه جدید تبدیل کند که در شکلی باشد که توسط قضیه B.3 قابل حل گردد.

- مثال:

$$\bullet \begin{cases} T(n) = T(\frac{n}{2}) + 1 & for\, n > 1, \quad n \quad a \quad power\, of \quad 2 \\ T(1) = 1 \end{cases}$$

$$n = 2^k \Rightarrow = k = \lg n$$

$$\Rightarrow T(2^k) = T(\frac{2^k}{2}) + 1 = T(2^{k-1}) + 1$$

$$t_k = T(2^k)$$

$$\Rightarrow t_k = t_{k-1} + 1 \qquad \Rightarrow t_k - t_{k-1} = 1 \qquad \Rightarrow t_k = c_1 + c_2 k$$

$$\Rightarrow T(2^k) = c_1 + c_2 k \qquad \Rightarrow T(n) = c_1 + c_2 \lg n \qquad \Rightarrow T(n) = 1 + \lg n$$

# حل روابط بازگشتی به روش تغییر متغیر

- مثال:

$$\bullet \begin{cases} T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n - 1 & for\, n > 1, \quad n \quad a \quad power\, of \quad 2 \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

$$n = 2^k \Rightarrow k = \lg n$$

$$\Rightarrow T(2^k) = 2T(\frac{2^k}{2}) + 2^k - 1 = 2T(2^{k-1}) + 2^k - 1$$

$$t_k = T(2^k)$$

$$\Rightarrow t_k = 2t_{k-1} + 2^k - 1 \Rightarrow t_k - 2t_{k-1} = 2^k - 1$$

$$\Rightarrow t_k = c_1 + c_2 2^k + c_3 k 2^k$$

$$\Rightarrow T(2^k) = c_1 + c_2 2^k + c_3 k 2^k$$

$$\Rightarrow T(n) = c_1 + c_2 n + c_3 n \lg n$$

$$\Rightarrow T(n) = n \lg n - (n-1)$$

# حل روابط بازگشتی به روش تغییر متغیر

- مثال:

$$\bullet\begin{cases} T(n) = 7T(\frac{n}{2}) + 18\left(\frac{n}{2}\right)^2 & for\, n > 1, \quad n \quad a \quad power\, of \quad 2 \\ T(1) = 0 \end{cases}$$

$$n = 2^k \Rightarrow k = \lg n$$

$$\Rightarrow T(2^k) = 7T(2^{k-1}) + 18(2^{k-1})^2$$

$$t_k = T(2^k)$$

$$\Rightarrow t_k = 7t_{k-1} + 18(2^{k-1})^2 = 7t_{k-1} + 18(4^{k-1}) = 7t_{k-1} + 4^k(\frac{18}{4})$$

$$\Rightarrow t_k = c_1 7^k + c_2 4^k$$

$$\Rightarrow T(2^k) = c_1 7^k + c_2 4^k$$

$$\Rightarrow T(n) = c_1 7^{\lg n} + c_2 4^{\lg n} = c_1 n^{\lg 7} + c_2 n^{\lg 4} = c_1 n^{\lg 7} + c_2 n^2$$

$$\Rightarrow T(n) = 6n^{\lg 7} - 6n^2 \approx 6n^{2.81} - 6n^2$$

# حل روابط بازگشتی به روش جایگذاری و تکرار

- در روش مدام سمت راست را بطور تکراری بر اساس فرمول اصلی بسط داده و در فرمول اصلی قرار می دهیم. این کار تا چند مرحله تکرار می شود تا به یک منطق کلی برسیم.

- مثال:

$$\begin{cases} t_n = t_{n-1} + n & for \quad n > 1 \\ t_1 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} t_n &= t_{n-1} + n \\ &= t_{n-2} + (n-1) + n \\ &= t_{n-3} + (n-2) + (n-1) + n \\ &= \cdots \\ &= t_{n-i} + \sum_{k=0}^{i-1} n-k \end{aligned}$$

$$n-i=1 \Rightarrow i=n-1 \quad \Rightarrow t_n = t_1 + \sum_{k=0}^{n-2} n-k = 1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

# حل روابط بازگشتی به روش جایگذاری و تکرار

- دو مثالی دیگر:

فرض $n=2^k$

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + cn$$

$$T(n) = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{cn}{2}\right) + cn = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 2cn$$

$$T(n) = 4\left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{cn}{4}\right) + 2cn = 2^3T\left(\frac{n}{8}\right) + 3cn$$

$$\rightarrow T(n) = 2^k * T\left(\frac{n}{2^k}\right) + kcn = cn + cnlgn = O(nlgn)$$

---

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{n}{2} + n = T\left(\frac{n}{8}\right) + \frac{n}{4} + \frac{n}{2} + n$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \left(\frac{n}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{n}{2^{k-2}}\right) + \dots + n = T\left(\frac{n}{2^k}\right) + n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

$$T(n) = 1 + n\left(2\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)\right) = 1 + n\left(2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) = O(n)$$

# حل روابط بازگشتی با استفاده از قضیه اصلی

- روابط بازگشتی با فرم $T(n)=aT(n/b)+f(n)$ را در نظر بگیرید بطوریکه

a و b اعداد مثبتی باشند و $f(n)$ تابعی از $n$ باشد آنگاه:

$$T(n)=aT(\frac{n}{b})+Cn^k$$

اگر a>۱ و b>=۱

$$T(n)=\begin{cases}\theta\left(n^{\log_b^a}\right) & a>b^k\\ \theta\left(n^k\log n\right) & a=b^k\\ \theta\left(n^k\right) & a<b^k\end{cases}$$

1. $T(n)=4T\left(\frac{n}{2}\right)+n$ → $T(n)\in\Theta\left(n^2\right)$
2. $T(n)=4T\left(\frac{n}{2}\right)+n^2$ → $T(n)\in\Theta\left(n^2\lg n\right)$
3. $T(n)=4T\left(\frac{n}{2}\right)+n^3$ → $T(n)\in\Theta\left(n^3\right)$

# حل روابط بازگشتی با استفاده از قضیه اصلی

- مثال ۱:

$$T(n) = 9T(n/3) + n$$

$$a = 9, b = 3, \ f(n) = n$$

$$g(n) = n^{\log_3 9} = n^2, \quad f(n) \in (n^{\log_3 9 - 1}) \quad Case \quad 1 \Rightarrow T(n) = \Theta(n^2)$$

---

- مثال ۲:

$$T(n) = T(2n/3) + 1$$

$$a = 1, b = 3/2, \ f(n) = 1$$

$$g(n) = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1 \in f(n), \qquad Case \quad 2 \Rightarrow T(n) = \Theta(\log n)$$

---

- مثال ۳:

$$T(n) = 3T(n/4) + n \log n$$

$$a = 3, b = 4, f(n) = n \log n$$

$$g(n) = n^{\log_4 3} = n^{0.793}, f(n) \in \Omega(n^{\log_4 3 + \varepsilon})$$

$Case \quad 3$

$$af(n/b) = 3\left(\frac{n}{4}\right)\log\left(\frac{n}{4}\right) \le \frac{3n}{4}\log n = cf(n)$$

for $c = \frac{3}{4}$, and sufficiently large $n$

$$\Rightarrow T(n) = \Theta(n \log n)$$

# حل روابط بازگشتی با استفاده از قضیه اصلی

- روابط بازگشتی زیر را حل نمایید:

- $T(n) = 6T(n/2) + n^3$
- $T(n) = 6T(n/2) + n^2$
- $T(n) = 27T(n/3) + n^3 \log n$
- $T(n) = 27T(n/3) + n^3 / \log n$
- $T(n) = 7T(n/7) + \log n!$

# نتیجه گیری

- روش حدس و استقرا حد پایین و بالای سست ایجاد کرده و سپس این شکاف را بهبود می بخشد. همچنین جایگذاری و تکرار، روشی زمانگیر است اما مستدل است.
- روابط بازگشتی با فرم $T(n) = aT(n/b) + f(n)$ را می توان با قضیه اصلی یا درخت بازگشت حل نمود.
- روابط بازگشتی با فرم $T(n) = a_1T(n/b_1) + \ldots + a_nT(n/b_n) + f(n)$ را می توان با درخت بازگشت حل نمود.
- روابط بازگشتی با فرم $T(n) = a_1T(n-b_1) + \ldots + a_nT(n-b_n) + f(n)$ را می توان با روش حل معادلات همگن و ناهمگن حل نمود.
- تغییر متغییر در موارد زیادی می تواند راهگشا باشد.